

STICHTING
MATHEMATISCH CENTRUM
2e BOERHAAVESTRAAT 49
AMSTERDAM

AFDELING TOEGEPASTE WISKUNDE

TN 49

Over gemengde randwaardeproblemen
voor de vergelijking van Laplace

door

T.M.T. Coolen



februari 1968

BIBLIOTHEEK MATHEMATISCH CENTRUM
AMSTERDAM



The Mathematical Centre at Amsterdam, founded the 11th of February, 1946, is a non-profit institution aiming at the promotion of pure mathematics and its applications, and is sponsored by the Netherlands Government through the Netherlands Organization for the Advancement of Pure Research (Z.W.O.) and the Central Organization for Applied Scientific Research in the Netherlands (T.N.O.), by the Municipality of Amsterdam and by several industries.

Inhoud

	blz.
1. Inleiding	2
2. Integraalrepresentaties van driedimensionale harmonische functies	4
3. Integraalrepresentaties van p-dimensionale harmonische functies	6
4. Integraalvergelijkingen	9
5. Het axiaalsymmetrische Dirichletprobleem voor een cirkelvormige schijf	11
6. Het axiaalsymmetrische Neumannprobleem voor een cirkelvormige schijf	19
7. De cirkelvormige plaatcondensator	25
8. De geladen schijf tussen twee parallelle geaarde platen	28
9. Een niet-axiaalsymmetrisch Dirichletprobleem	30
Bibliografie	34

1. Inleiding

Onder een gemengd randwaardeprobleem voor de vergelijking van Laplace zullen we verstaan het probleem een functie $u(x,y,z)$ te vinden die harmonisch is in een gebied $D \subset \mathbb{R}^3$, en waarvan op een deel $\partial D'$ van de rand ∂D de functie voorgeschreven is, en op het overige deel $\partial D''$ de normale afgeleide van de functie. Dit in tegenstelling tot het "uniforme" probleem, waarbij overal op ∂D of de functie, of zijn normale afgeleide is voorgeschreven.

Gemengde randwaardeproblemen komen bijvoorbeeld voor in de mathematische fysica, o.a. bij elektrostatische en elastische problemen. Voor een overzicht hoe men tot de formulering van gemengde randwaardeproblemen komt, zie men bijvoorbeeld [13].

In het volgende zullen we ons voornamelijk beperken tot een bepaalde klasse van gemengde randwaardeproblemen. We kiezen voor D de halfruimte $z > 0$, en voor ∂D het vlak $z = 0$. Bovendien zullen we $\partial D'$ en $\partial D''$ axiaalsymmetrisch voorstellen. We kunnen dan gebruik maken van cilindercoördinaten r, θ, z .

In §5 t/m §8 worden axiaalsymmetrische problemen, dat wil zeggen dat u alleen afhangt van r en z , behandeld. De harmonische functie u voldoet dan aan de axiaalsymmetrische potentiaalvergelijking

$$(1.1) \quad \frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u(r,z)}{\partial r} + \frac{\partial^2 u(r,z)}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0.$$

Er zullen twee methoden worden gebruikt. Methode I gaat uit van een complexe integraalrepresentatie van u , die afkomstig is van Green en Zerna [4]. Methode II maakt gebruik van twee integraalrepresentaties, die van Helmholtz en Poisson, die op een bepaalde manier gecombineerd worden. Deze is, voor zover het het Dirichletprobleem voor een cirkelvormige schijf betreft, afkomstig van Heins en MacCamy [7], [8], [9]. De methode wordt hier uitgebreid, zodat hij ook voor enkele andere problemen gebruikt kan worden. De laatste methode heeft het voordeel dat u in een reële representatie gegeven wordt.

De drie integraalrepresentaties, die van Green en Zerna, van Helmholtz en van Poisson, komen in §2 ter sprake. Beide methoden leiden tot integraalvergelijkingen, die voor de eenvoudige problemen analytisch geïnverteerd kunnen worden. Deze (abelse) integraalvergelijkingen worden besproken in §4. De meer ingewikkelde problemen leiden tot Fredholm-vergelijkingen van de tweede soort. We laten bovendien zien, dat beide methoden ten nauwste samenhangen.

In de laatste paragraaf, tenslotte, laten we aan de hand van een voorbeeld zien hoe beschouwingen, die nauw verwant zijn aan methode II, bij niet-axiaalsymmetrische gemengde randwaardeproblemen leiden tot problemen voor gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentialen. Deze kunnen aangepakt worden op een manier, die sterk lijkt op de wijze waarop de problemen uit §5 t/m §8 worden behandeld. De integraalrepresentaties en integraalvergelijkingen, die daarbij ter sprake komen, worden in §3 en §4 besproken.

2. Integraalrepresentaties van driedimensionale harmonische functies

De integraalrepresentaties van driedimensionale harmonische functies, die bij de behandeling van axiaalsymmetrische randwaardeproblemen nodig zijn, worden in deze paragraaf opgesomd. We zullen werken in cilindercoördinaten r, θ, z .

Helmholtzrepresentaties

De functie

$$(2.1) \quad u(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{f(\rho, \alpha) z \rho d\alpha d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha) + z^2)^{3/2}}$$

is harmonisch in het gebied $z > 0$, en neemt op de rand $z = 0$ continu de waarden $f(r, \theta)$ aan, voor die r en θ waarvoor $f(r, \theta)$ continu is.

$$(2.2) \quad u(r, \theta, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \frac{g(\rho, \alpha) \rho d\alpha d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos(\theta - \alpha) + z^2)^{1/2}}$$

is een in de halfruimte $z > 0$ harmonische functie, waarvan de afgeleide in de z -richting op de rand $z = 0$ continu de waarden $g(r, \theta)$ aanneemt voor die r en θ waarvoor $g(r, \theta)$ continu is. De integraal in (2.1) is 0 in ∞ als f begrensd is voor $r \rightarrow \infty$, de integraal in (2.2) is dat als $g(r) = O(r^{-\frac{1}{2}-h})$, waarin $h > 0$, voor $r \rightarrow \infty$.

Poissonrepresentatie

Een axiaalsymmetrische harmonische functie kan worden uitgedrukt in de waarden die deze op de as van symmetrie aanneemt volgens

$$(2.3) \quad u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(0, z + ir \cos \theta) d\theta = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{u(0, z + it) dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}},$$

wanneer $u(0, z)$ voor complexe z voort te zetten is als een analytische functie in z . Deze formule volgt uit een formule voor gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentialen, waarvoor naar de volgende paragraaf wordt verwezen.

Representaties van Green en Zerna

Wanneer $f(t)$ een reële continue functie is, dan stelt

$$(2.4) \quad u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

waarin a een willekeurig positief getal is, een harmonische functie voor die axiaalsymmetrisch is. Dit kan men gemakkelijk nagaan door substitutie van (2.4) in vergelijking (1.1). Door speciale eisen op te leggen aan de functie $f(t)$ verkrijgt men integraalrepresentaties van verschillend karakter.

Representaties met Besselfuncties

Ook functies van de vorm

$$(2.5) \quad u(r, z) = \int_0^\infty e^{-zt} J_0(rt) A(t) dt$$

zijn harmonisch en axiaalsymmetrisch. Deze representaties zullen echter maar zeer terloops ter sprake komen.

3. Integraalrepresentaties van p-dimensionale harmonische functies

Enkele aspecten van de gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentiaaltheorie (GASPT), die van belang zijn bij de behandeling van niet-axiaalsymmetrische gemengde randwaardeproblemen, worden nu belicht.

Een gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentiaal is een oplossing van de gegeneraliseerde potentiaalvergelijking

$$(3.1) \quad F_{xx} + F_{yy} + py^{-1}F_y = 0, \quad p \neq 0, -1, -2, \dots$$

Voor $p = 1$ is (3.1) juist de reeds bekende vergelijking (1.1) voor driedimensionale axiaalsymmetrische potentialen. Een oplossing F van (3.1) is op te vatten als een om de x -as symmetrische potentiaal in een $(p+2)$ -dimensionale ruimte. Een tweetal stellingen, waarvan het bewijs gegeven is door Hyman [10], worden nu genoemd.

Stelling 1

Een oplossing $F(x,y)$ van de gegeneraliseerde potentiaalvergelijking (3.1), die analytisch is in een gebied R dat een segment I van de x -as bevat, wordt op R eenduidig door zijn waarden $F_0(x)$ op het segment I bepaald. Verder is $F(x,y)$ te ontwikkelen in een reeks

$$(3.2) \quad F(x,y) = F_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n y^{2n} [2^n n! (p+1)(p+3) \dots \\ \dots (p+2n-1)]^{-1} \frac{d^{2n} F_0(x)}{dx^{2n}}.$$

Stelling 2

Wanneer $F_0(x)$ een analytische functie op het interval I van de x -as is, dan convergeert de reeks (3.2) in een gebied rondom I naar een functie $F(x,y)$, die analytisch is in x en y , en die voldoet aan de vergelijking (3.1) ($p \neq -1, -3, \dots$). Wanneer $p \neq 0, -2, -4, \dots$, dan is F de enige analytische oplossing.

De Poissonrepresentatie

Bovenstaande stellingen maken het mogelijk een integraalrepresentatie van gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentialen te vinden, die bekend staat onder de naam Poissonrepresentatie. Voor zekere $a > 0$ geldt voor $|h| < a$ uniform

$$F_0(x+h) = \sum_{n=0}^{\infty} F_0^{(n)}(x) \frac{h^n}{n!},$$

en ook

$$(3.3) \quad F_0(x+iy \cos \alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} F_0^{(n)}(x) \frac{i^n y^n \cos^n \alpha}{n!}$$

uniform voor $|y| < a$. Er volgt

$$(3.4) \quad \int_0^{\pi} F_0(x + iy \cos \alpha) \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha =$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_0^{(n)}(x) \frac{i^n y^n}{n!} \int_0^{\pi} \cos^n \alpha \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha.$$

Met de integralen

$$\int_0^{\pi} \cos^n \alpha \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha = 0 \quad \text{als } n \text{ oneven,}$$

en

$$\int_0^{\pi} \cos^{2n} \alpha \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha = \frac{\Gamma(\frac{p}{2}) \Gamma(\frac{2n+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+2n+1}{2})}$$

volgt uit (3.4) na enig gereken

$$\int_0^{\pi} F_0(x + iy \cos \alpha) \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha =$$

$$\frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{p}{2})}{\Gamma(\frac{p+1}{2})} \left[F_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n} F_0^{(2n)}(x)}{2^n n! (p+1) \dots (p+2n-1)} \right].$$

Vergelijken wij bovenstaande uitdrukking met (3.2), dan vinden wij

$$(3.5) \quad F(x,y) = \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{p}{2})} \int_0^\pi F_0(x + iy \cos \alpha) \sin^{p-1} \alpha \, d\alpha.$$

Weliswaar is deze betrekking slechts afgeleid voor een klein gebiedje, maar het principe van analytische voortzetting geeft ons de mogelijkheid $F(x,y)$ door het rechterlid van (3.5) voor te stellen overal waar $F(x,y)$ analytisch is. Verder is duidelijk dat

$$F_0(x) = F(x,0).$$

Helmholtz-achtige representaties

Tenslotte wordt vermeld hoe op een Helmholtz-achtige wijze een p -dimensionale harmonische functie gedefinieerd in de halfruimte $x_p > 0$ voorgesteld kan worden. Wanneer een harmonische functie $u(x_1, \dots, x_p)$ de voorgeschreven waarden $f(x_1, \dots, x_{p-1})$ op de rand $x_p = 0$ aanneemt, dan is hij voor te stellen als

$$(3.6) \quad u(x_1, \dots, x_p) = \frac{2}{\sigma_{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) x_p \, d\xi_1 \dots d\xi_{p-1}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_{p-1} - \xi_{p-1})^2 + x_p^2]^{p/2}}.$$

Wanneer $\partial u / \partial x_p$ op de rand $x_p = 0$ de waarden $g(x_1, \dots, x_{p-1})$ aanneemt, dan kan men u voorstellen als

$$(3.7) \quad u(x_1, \dots, x_p) = \frac{2}{\sigma'_{p-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{g(\xi_1, \dots, \xi_{p-1}) \, d\xi_1 \dots d\xi_{p-1}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_{p-1} - \xi_{p-1})^2 + x_p^2]^{p/2-1}}.$$

Het getal σ_{p-1} is de oppervlakte van een bol in de p -dimensionale ruimte met straal 1. Meer hierover kan men vinden in Garabedian [3]. Vanzelfsprekend moeten f en g zodanig zijn dat de integralen in (3.6) en (3.7) bestaan. Het getal σ'_{p-1} in (3.7) is gelijk aan $(p-2)\sigma_{p-1}$.

4. Integraalvergelijkingen

In deze paragraaf worden enkele integraalvergelijkingen die bij de behandeling van de gemengde randwaardeproblemen ter sprake zullen komen, behandeld.

Allereerst wordt de integraalvergelijking

$$(4.1) \quad r^{2n} g(r) = \int_0^r f(t) (r^2 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt, \quad r > 0,$$

beschouwd, waarin g een gegeven n maal continu differentieerbare functie is, en f de te bepalen (continue) functie. Deze vergelijking zullen we tegenkomen bij het niet-axiaalsymmetrische Dirichlet probleem voor de cirkelvormige schijf. Stel $r = u^{\frac{1}{2}}$, $t = s^{\frac{1}{2}}$, zodat $dt = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} ds$, en stel verder $G(u) = g(u^{\frac{1}{2}})$, $F(s) = \frac{1}{2} s^{-\frac{1}{2}} f(s)$, dan gaat (4.1) over in

$$(4.2) \quad (-1)^n u^n G(u) = (-1)^n \int_0^u F(s) (u-s)^{n-\frac{1}{2}} ds,$$

een integraalvergelijking met convolutiekern. De Laplace-getransformeerde van (4.2) is

$$\overline{G}^{(n)}(p) = (-1)^n \overline{F}(p) p^{-n-\frac{1}{2}} \Gamma(n + \frac{1}{2}),$$

waarbij $\overline{G}$ en $\overline{F}$ de Laplacegetransformeerden van resp. G en F voorstellen. Er volgt

$$\overline{F}(p) = p(-1)^n [\overline{G}^{(n)} \cdot p^n] \frac{p^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n + \frac{1}{2})},$$

waaruit, na terugtransformeren, volgt

$$F(u) = \frac{d}{du} \int_0^u \frac{d^n}{ds^n} [s^n G(s)] \frac{(u-s)^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} ds.$$

Gaan we terug naar onze oude variabelen, dan vinden we

$$(4.3) \quad f(r) = \frac{2}{\Gamma(n + \frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dr} \int_0^r \left[\left(\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \right)^n (t^{2n} g(t)) \right] (r^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} t \, dt.$$

Voor $n = 0$, het geval dat van belang is voor axiaalsymmetrische problemen, krijgt vergelijking (4.1) de vorm

$$(4.4) \quad g(r) = \int_0^r \frac{f(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r > 0,$$

een vergelijking van het abelse type, die dus, wegens (4.3) de oplossing

$$(4.5) \quad f(r) = \frac{2}{\pi} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{t g(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r > 0$$

heeft. De vergelijking (4.1) zou men een gegeneraliseerde abelse integraalvergelijking kunnen noemen.

Een probleem, dat in zekere zin het omgekeerde probleem is van (4.4) en (4.5), is ook van belang. Stel dat we de continue functie $l(r)$, $r > 0$, zoeken, die voldoet aan

$$(4.6) \quad h(r) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{t l(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r > 0,$$

waarin $h(r)$ bekend wordt verondersteld, en continu. Hieruit volgt

$$\int_0^r h(u)u du = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{t l(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r > 0.$$

Inverteren van deze laatste vergelijking levert volgens (4.5)

$$(4.7) \quad rl(r) = \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{t}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} \int_0^t h(u)u du dt, \quad r > 0.$$

Na enig manipuleren kan men vinden dat het rechterlid van (4.7) gelijk is aan

$$r \int_0^r \frac{u h(u)du}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}},$$

zodat vergelijking (4.6) de oplossing

$$(4.8) \quad l(r) = \int_0^r \frac{u h(u)du}{(r^2 - u^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad r > 0$$

heeft.

5. Het axiaalsymmetrische Dirichlet probleem voor een cirkelvormige schijf

Gezocht wordt een axiaalsymmetrische functie $u(r,z)$ die oplossing is van

$$(5.1) \quad u_{rr} + r^{-1}u_r + u_{zz} = 0, \quad z > 0,$$

en die voldoet aan de gemengde randvoorwaarden

$$(5.2) \quad u(r,0) = g(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$(5.3) \quad u_z(r,0) = 0, \quad r > 1,$$

waarbij verondersteld wordt dat $g(r)$ een continue functie is op $[0,1)$ en $u(r,z)$ en $u_z(r,z)$ continu zijn bij nadering tot de rand $z = 0$, behalve eventueel voor $r = 1$. Verder veronderstellen we

$$(5.4) \quad u(r,z) \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

We zullen een tweetal methoden ter oplossing van dit probleem bespreken, en daarna hun onderling verband laten zien.

Methode I

We gaan uit van een integraalrepresentatie van het type (2.4), nl.

$$(5.5) \quad u(r,z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t)dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

waarin $f(t)$ een nader te bepalen continue reële functie op $[0,1)$ voorstelt. We volgen nu de beschouwingen van Green en Zerna [4], [12].

Voor $0 \leq t < 1$ geldt het volgende:

$$\begin{aligned} \text{Stel } r^2 + (z+it)^2 &= \xi^2 e^{i\eta}, \quad \text{dan is } (r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}} = \xi e^{\frac{1}{2}i\eta}, \\ r^2 + (z-it)^2 &= \xi^2 e^{-i\eta}, \quad (r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}} = \xi e^{-\frac{1}{2}i\eta}, \quad 0 \leq \eta \leq \pi. \end{aligned}$$

Verder, wanneer $z = 0$, dan geldt

$$(5.6) \quad (r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}} = (r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{als } t \leq r$$

en

$$(5.7) \quad (r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}} = - (r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}} = i(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}} \quad \text{als } t \geq r.$$

Het is duidelijk dat de functie $u(r, z)$, gedefinieerd door (5.5) overal harmonisch is behalve op de schijf $z = 0$, $0 \leq r \leq 1$.

We willen nu laten zien dat $u(r, z)$ continu is als $z \rightarrow 0$. Om dit te doen, nemen we eerst $0 < r < 1$. Dan geldt

$$|r^2 + (z + it)^2| \geq r^2 + z^2 - t^2 \geq r^2 - t^2 \text{ als } t^2 < r^2 \text{ en}$$

$$|r^2 + (z + it)^2| \geq t^2 - r^2 \text{ als } r^2 < t^2,$$

wat ook de (reële) waarde van z moge zijn. Dus is, voor $0 < t < 1$

$$\left| \frac{f(t)}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} \right| \leq \frac{|f(t)|}{|r^2 - t^2|^{\frac{1}{2}}},$$

zodat met de stelling van de gemajoreerde convergentie volgt

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} &= \int_0^1 \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} = \\ &= \int_0^r \frac{f(t) dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_r^1 \frac{f(t) dt}{i(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}, \end{aligned}$$

en evenzo

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^r \frac{f(t) dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_r^1 \frac{f(t) dt}{i(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}},$$

zodat

$$(5.8) \quad u(r, z) \rightarrow \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{f(t) dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 < r < 1, \text{ voor } z \rightarrow 0.$$

We hebben (5.8) bewezen voor $r \neq 0$; $r = 0$ bekijken we afzonderlijk.

Er geldt

$$\begin{aligned} u(0, z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{z + it} + \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{z - it} = \\ &= \frac{2z}{\pi} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{z^2 + t^2} = \frac{2}{\pi} \int_0^{1/z} \frac{f(zu) du}{1 + u^2}, \end{aligned}$$

waaruit volgt

$$(5.9) \quad \lim_{z \rightarrow 0} u(0, z) = f(0).$$

Uit (5.8) volgt voor $r \neq 0$

$$(5.10) \quad \lim_{z \rightarrow 0} u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} f(r \cos \theta) d\theta.$$

Uit (5.9) en (5.10) volgt dan dat $u(r, z)$ ook in de oorsprong continu tot zijn randwaarde nadert, en dat dit ook voor $r = 0$ uitgedrukt kan worden m.b.v. (5.8).

Tenslotte kan men, omdat

$$(r^2 + (z \pm it)^2)^{\frac{1}{2}} \geq r^2 + z^2 - 1 \text{ als } 0 \leq t \leq 1,$$

vinden dat

$$|u(r, z)| \leq (r^2 + z^2 - 1)^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^1 |f(t)| dt,$$

zodat voor grote waarden van $r^2 + z^2$ geldt

$$(5.11) \quad u(r, z) = O((r^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}}).$$

Om aan randvoorwaarde (5.2) te voldoen, moeten we vanwege (5.8) eisen dat

$$(5.12) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{f(t) dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} = g(r), \quad 0 \leq r < 1.$$

Inverteren van deze integraalvergelijking levert volgens (4.5)

$$(5.13) \quad f(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho g(\rho) d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t < 1.$$

We bekijken nu nog $u_z(r, 0)$. We merken op dat

$$(5.14) \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{(r^2 + (z \pm it)^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \frac{z \pm it}{(r^2 + (z \pm it)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

zodat

$$\frac{\partial u(r,z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^1 \frac{(z+it)f(t)dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_0^1 \frac{(z-it)f(t)dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Op een manier analoog aan de afleiding van (5.8) kan men laten zien dat

$$u_z(r,0) = 0 \quad \text{als} \quad r > 1$$

en dat

$$(5.15) \quad u_z(r,0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{t f(t) dt}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

De oplossing van het probleem wordt nu gegeven door (5.13) en (5.5).

Methode II

Deze is naar Heins en MacCamy [9]. We gaan uit van de Helmholtz-representatie (2.2), die hier de vorm

$$u(r,z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{u_z(\rho,0) \rho \, d\alpha \, d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2r\rho \cos \alpha + z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

aanneemt, mede i.v.m. de hoekonafhankelijkheid van u . Er volgt

$$(5.16) \quad u(0,z) = \int_0^1 \frac{u_z(\rho,0) \rho}{(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}} d\rho.$$

Hoewel (5.16) afgeleid is voor reële z , zien we toch dat de integraal een analytische functie voorstelt voor complexe $z = \xi + i\eta$. Het is dus mogelijk $u(0,z)$ analytisch voort te zetten voor complexe z ; de voortzetting geven we aan met

$$u(0,z) = u(0,\xi+i\eta) = \phi(\xi,\eta) + i\psi(\xi,\eta).$$

Uit (5.16) volgt onmiddellijk dat

$$(5.17) \quad \operatorname{Re} u(0,i\eta) = \phi(0,\eta) = 0 \quad \text{voor} \quad |\eta| > 1.$$

Verder is gemakkelijk in te zien dat

$$u(0,\bar{z}) = \overline{u(0,z)},$$

ofwel

$$(5.18) \quad \phi(\xi, -\eta) = \phi(\xi, \eta), \quad \psi(\xi, -\eta) = -\psi(\xi, \eta).$$

Tenslotte volgt eveneens uit (5.16) dat

$$(5.19) \quad u(0, z) \rightarrow 0 \text{ als } |z| \rightarrow \infty.$$

We hebben nog beschikking over de Poissonrepresentatie (2.3) die we kunnen schrijven in de vorm

$$(5.20) \quad u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-r}^r \frac{\phi(z, t)}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt,$$

ofwel, met inachtneming van (5.18)

$$u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z, t)}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt.$$

De randvoorwaarde (5.2) resulteert in de eis dat

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(0, t)}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} dt, \quad 0 \leq r < 1.$$

Deze integraalvergelijking wordt geïnverteerd volgens (4.5):

$$(5.21) \quad \phi(0, \eta) = \frac{d}{d\eta} \int_0^\eta \frac{\rho g(\rho) d\rho}{(\eta^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq \eta < 1.$$

Wegens (5.17) en (5.18) kennen we nu de functie $\phi(\xi, \eta)$ op de gehele η -as. Ook is $\phi(\xi, \eta)$ harmonisch, en nadert deze tot 0 als $\xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty$, zodat $\phi(\xi, \eta)$ als volgt door zijn waarden op de η -as bepaald is:

$$(5.22) \quad \phi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(0, \tau) \xi}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2} d\tau.$$

De oplossing van het probleem wordt nu gegeven door (5.21), (5.22) en (5.20).

Tot slot bekijken we de interessante grootheid $u_z(r, 0)$. Voor $0 \leq t < 1$ volgt uit (5.16) dat

$$u(0, it) = \frac{1}{i} \int_0^t \frac{u_z(\rho, 0) \rho d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_t^1 \frac{u_z(\rho, 0) \rho d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

De keuze van de wortel in (5.16) is dezelfde als die bij methode I, d.w.z. $(\rho^2 + z^2)^{\frac{1}{2}}$ heeft argument 0 voor z op de reële as. Daar $u_z(\rho, 0)$ reëel is vinden we voor $u_z(\rho, 0)$ de abelse integraalvergelijking

$$(5.23) \quad \phi(0, t) = \operatorname{Re} u(0, it) = \int_t^1 \frac{u_z(\rho, 0) \rho d\rho}{(\rho^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t < 1,$$

waarin we $\phi(0, t)$ reeds kennen. Inverteren van de integraalvergelijking levert

$$(5.24) \quad u_z(r, 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_r^1 \frac{\phi(0, t) t dt}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Oplossing uitgedrukt d.m.v. Besselfuncties

Uit de bekende integraal

$$\int_0^\infty e^{-p\tau} J_0(r\tau) d\tau = (p^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad \operatorname{Re} p > 0,$$

volgt

$$(5.25) \quad (r^2 + (z \pm it)^2)^{-\frac{1}{2}} = \int_0^\infty e^{-(z \pm it)\tau} J_0(r\tau) d\tau,$$

zodat we de oplossing $u(r, z)$, verkregen volgens methode I, wanneer we bovenstaande uitdrukking substitueren in (5.5), kunnen schrijven als

$$(5.26) \quad u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty J_0(r\tau) e^{-z\tau} \int_0^1 \cos(t\tau) f(t) dt d\tau,$$

waarin $f(t)$ uiteraard weer voldoet aan (5.13).

Verband tussen beide methoden

Vergelijken wij de resultaten verkregen volgens methode I ((5.5), (5.13), (5.15)) met die verkregen volgens methode II ((5.20), (5.21), (5.22), (5.24)), dan zien we een verregaande gelijkenis. We zullen hierop nu wat nader ingaan.

Een functie $\phi(z)$, analytisch in de bovenhelft $\text{Im } z > 0$ van het complexe vlak, die op de rand $\text{Im } z = 0$ continu voortzetbaar is, kan worden gevonden uit de reële delen van de functiewaarden op de rand. Er geldt namelijk, zie hiertoe bijv. Muschelischwili [12], blz. 166,

$$\phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{Re } \phi(t)}{t - z} dt + Ci, \text{Im } z > 0.$$

Wanneer we eisen dat $\phi(z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$, dan moeten we de constante C gelijk aan 0 kiezen.

Het is duidelijk, dat voor een functie $\psi(z)$, die analytisch is in het rechterhalfvlak $\text{Re } z > 0$ en continu voortzetbaar op de rand $\text{Re } z = 0$, geldt

$$\psi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\text{Re } \psi(t) dt}{t - z} + Ci.$$

Onze functie $u(0, z)$ kan dus voor complexe z geschreven worden als

$$u(0, z) = \frac{1}{\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\text{Re } u(0, t) dt}{t - z}$$

ofwel

$$(5.27) \quad u(0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{Re } u(0, i\tau) d\tau}{i\tau - z}.$$

Immers, $\text{Re } u(0, i\tau) = 0$ voor $|\tau| > 1$.

Volgens de tweede methode hadden we

$$u(r, z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(0, z + ir \cos \alpha) d\alpha =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{Re } u(0, it) dt}{it - z - ir \cos \alpha} \right].$$

M.b.v. de bekende integraal

$$(5.28) \quad \int_0^\pi \frac{dt}{a + b \cos t} = \frac{\pi}{(a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}}$$

vinden we

$$u(r,z) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \operatorname{Re} u(0,it) ((it-z)^2 + r^2)^{-\frac{1}{2}} dt =$$

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi(0,t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

waarbij we gebruik maken van (5.18), nl. dat $\phi(\xi, \eta) = \phi(\xi, -\eta)$. Kennelijk mogen we $\phi(0,t)$ en $f(t)$ identificeren, wat in het licht van (5.13) en (5.21) niet verbazingwekkend is.

In deze paragraaf zijn twee methoden besproken om het Dirichlet-probleem voor de cirkelvormige schijf op te lossen. Als resultaat is gevonden een complexe en een reële voorstellingswijze van de gevraagde functie $u(r,z)$. Voor het complementaire probleem, het Dirichletprobleem voor een scherm met een cirkelvormig gat erin, kan men oplossingen van soortgelijke gedaanten vinden.

6. Het axiaalsymmetrische Neumann probleem voor een cirkelvormige schijf

In deze paragraaf beschouwen we het probleem een axiaalsymmetrische harmonische functie te vinden - die dus oplossing is van de vergelijking

$$(6.1) \quad u_{rr} + r^{-1}u_r + u_{zz} = 0, \quad z > 0$$

- en die voldoet aan de gemengde randvoorwaarden

$$(6.2) \quad u_z(r, 0) = g(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$(6.3) \quad u(r, 0) = 0, \quad r > 1,$$

waarbij verondersteld wordt dat $g(r)$ een continue functie op $[0, 1)$ is, en $u(r, z)$ en $u_z(r, z)$ continu zijn bij nadering tot de rand $z = 0$, behalve eventueel voor $r = 1$. Verder wordt weer aangenomen dat

$$(6.4) \quad u(r, z) \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad r^2 + z^2 \rightarrow \infty.$$

Weer worden twee methoden naast elkaar gezet. De eerste wordt slechts summier weergegeven. Men zie bijvoorbeeld Sneddon [13].

Methode I

Uitgangspunt is een integraalrepresentatie van het type (2.4), hier in de vorm

$$(6.5) \quad u(r, z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} - \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \frac{f(t) dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}}},$$

waarin weer $f(t)$ een continue reële functie op $[0, 1)$ is. De wortels worden op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf gekozen. M.b.v. (5.14) vindt men

$$\frac{\partial u(r, z)}{\partial z} = \frac{1}{\pi i} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[\int_0^1 \frac{(z+it)f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} - \int_0^1 \frac{(z-it)f(t) dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{\frac{1}{2}}} \right].$$

Omdat voor $0 \leq r < 1$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \int_0^1 \frac{(z+it)f(t) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{\frac{1}{2}}} = \int_0^r \frac{f(t)it dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}} + \int_r^1 \frac{f(t)it dt}{i(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}$$

geldt, i.v.m. de wortelconventies (5.6) en (5.7), volgt er

$$\lim_{z \rightarrow 0} u_z(r, z) = u_z(r, 0) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tf(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Een en ander kan op dezelfde wijze als in de vorige paragraaf worden gerechtvaardigd. We vinden de integraalvergelijking

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \int_0^r \frac{tf(t)dt}{(r^2 - t^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < 1,$$

die we volgens (4.8) kunnen inverteren, zodat

$$(6.6) \quad f(t) = \int_0^t \frac{g(\rho)\rho \, d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Ook kan men, op een analoge manier als hierboven, vinden

$$(6.7) \quad u(r, 0) = \frac{2}{\pi} \int_r^1 \frac{f(t)dt}{(t^2 - r^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

Alle interessante grootheden zijn nu bepaald.

Methode II

Heins en MacCamy [9] hebben hun methode alleen ontwikkeld voor het Dirichletprobleem voor een schijf. Er volgt nu een uitbreiding van die methode, waarmee het Neumannprobleem voor een schijf behandeld kan worden.

We gaan uit van de representatie (2.1), hier geschreven als

$$u(r, z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} \frac{u(\rho, 0)\rho z \, d\alpha \, d\rho}{(r^2 + \rho^2 - 2\rho r \cos \alpha + z^2)^{3/2}},$$

wegens de hoekonafhankelijkheid, en wegens (5.3). Er volgt

$$(6.8) \quad u(0, z) = \int_0^1 \frac{u(\rho, 0)\rho z \, d\rho}{(\rho^2 + z^2)^{3/2}}.$$

We kunnen weer $u(0, z)$ voor complexe $z = \xi + i\eta$ analytisch voortzetten, en we stellen weer

$$u(0, z) = u(0, \xi + i\eta) = \phi(\xi, \eta) + i\psi(\xi, \eta).$$

Uit (6.8) volgt

$$(6.9) \quad \psi(0, \eta) = \operatorname{Im} \int_0^1 \frac{u(\rho, 0) i \eta \rho \, d\rho}{(\rho^2 - \eta^2)^{3/2}} = 0 \text{ voor } |\eta| > 1,$$

en ook

$$u(0, \bar{z}) = \overline{u(0, z)},$$

ofwel

$$(6.10) \quad \phi(\xi, -\eta) = \phi(\xi, \eta), \quad \psi(\xi, -\eta) = -\psi(\xi, \eta).$$

Tenslotte volgt uit (6.8) dat

$$(6.11) \quad u(0, z) \rightarrow 0 \text{ als } |z| \rightarrow \infty.$$

Maar $u(r, z)$ (z nu reëel) is ook uit te drukken m.b.v. de Poissonrepresentatie, zodat met (6.10) $u(r, z)$ te schrijven is als

$$(6.12) \quad u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}.$$

Daar $u(0, z+it)$ een analytische functie is, voldoen ϕ en ψ aan de vergelijkingen van Cauchy-Riemann

$$\frac{\partial \phi}{\partial \xi} = \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \quad \text{en} \quad \frac{\partial \phi}{\partial \eta} = -\frac{\partial \psi}{\partial \xi},$$

waarvan we gebruik maken na differentiatie van (6.12) naar z :

$$\frac{\partial u}{\partial z}(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{1}{(r^2 - t^2)^{1/2}} \frac{\partial \phi}{\partial z}(z, t) dt = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{1}{(r^2 - t^2)^{1/2}} \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial t} dt,$$

waaruit de integraalvergelijking

$$g(r) = u_z(r, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{1}{(r^2 - t^2)^{1/2}} \frac{\partial \psi(0, t)}{\partial t} dt, \quad 0 \leq t < 1$$

volgt. Inverteren volgens (4.5) levert ons

$$\frac{\partial \psi(0, \eta)}{\partial \eta} = \frac{d}{d\eta} \int_0^\eta \frac{\rho g(\rho) d\rho}{(\eta^2 - \rho^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq \eta < 1,$$

waaruit volgt dat

$$(6.13) \quad \psi(0, \eta) = \int_0^\eta \frac{\rho \, g(\rho) \, d\rho}{(\eta^2 - \rho^2)^{1/2}} + \text{const.}, \quad 0 \leq \eta < 1.$$

Met (6.10) en (6.11) vinden we

$$\psi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(0, \tau) \xi \, d\tau}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{const.} \, \xi \, d\tau}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2},$$

en anderszijds ook

$$\psi(\xi, -\eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(0, \tau) \xi \, d\tau}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2} + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\text{const.} \, \xi \, d\tau}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2}.$$

Optelling van de laatste twee relaties levert ons $\text{const.} = 0$. De functie ϕ kunnen we terugvinden d.m.v. de vergelijkingen van Cauchy-Riemann. Uit $\partial\phi/\partial\eta = -\partial\psi/\partial\xi$ volgt

$$\phi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(0, \tau) \frac{\eta - \tau}{(\eta - \tau)^2 + \xi^2} \, d\tau + \phi_0(\xi),$$

waarin $\phi_0(\xi)$ een functie is, die bepaald wordt door de andere vergelijking van Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial\phi}{\partial\xi}(\xi, \eta) = \phi'_0(\xi) - \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(0, \tau) \frac{2\xi(\eta - \tau) \, d\tau}{((\eta - \tau)^2 + \xi^2)^2},$$

$$\text{en} \quad \frac{\partial\psi}{\partial\eta}(\xi, \eta) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \psi(0, \tau) \frac{2\xi(\eta - \tau) \, d\tau}{((\eta - \tau)^2 + \xi^2)^2}.$$

We concluderen $\phi'_0(\xi) = 0 \implies \phi_0(\xi) = \text{const.}$, die, omdat $u(0, z) \rightarrow 0$ als $|z| \rightarrow \infty$, dan 0 moet zijn. We hebben dus uiteindelijk gevonden

$$(6.14) \quad \phi(\xi, \eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\psi(0, \tau)(\eta - \tau) \, d\tau}{(\eta - \tau)^2 + \xi^2}.$$

Verder volgt op eenvoudige wijze

$$(6.15) \quad u(r, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(0, \tau) \, d\tau}{(r^2 - \tau^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq r < 1,$$

waarin $\phi(0, \eta) = \lim_{\xi \downarrow 0} \phi(\xi, \eta)$ is. De oplossing van het probleem wordt gegeven door (6.13), waarin de constante gelijk aan 0 is genomen, (6.14) en (6.12).

Oplossing uitgedrukt d.m.v. Besselfuncties

Maken wij gebruik van de betrekking (5.25), dan vinden we uit (6.5), de oplossing verkregen volgens methode I, dat

$$u(r, z) = \frac{1}{\pi i} \int_0^1 \int_0^\infty f(t) J_0(r\tau) e^{-z\tau} (e^{-it\tau} - e^{it\tau}) d\tau dt,$$

ofwel

$$(6.16) \quad u(r, z) = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty J_0(r\tau) e^{-z\tau} \int_0^1 \sin(t\tau) f(t) dt d\tau,$$

waarin $f(t)$ voldoet aan (6.6).

Verband tussen beide methoden

We zullen weer nagaan op welke wijze de twee besproken methoden samenhangen.

Beschouw voor complexe z de functie $v(0, z) = iu(0, z)$, dan is $v(0, z)$ analytisch daar waar $u(0, z)$ analytisch is. Volgens (5.27) kunnen we schrijven

$$(6.17) \quad v(0, z) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{Re} v(0, i\tau) d\tau}{i\tau - z}.$$

Nu is echter

$$\operatorname{Re} v(0, i\tau) = \operatorname{Re} iu(0, i\tau) = -\operatorname{Im} u(0, i\tau),$$

zodat, als we bovendien in aanmerking nemen dat $\psi(0, \eta) = 0$ voor $|\eta| > 1$ (zie (6.9)), volgt dat

$$v(0, z) = -\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Im} u(0, i\tau) d\tau}{i\tau - z}.$$

De tweede methode leverde ons

$$u(r,z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(0, z+ir \cos \alpha) d\alpha,$$

zodat

$$\begin{aligned} iu(r,z) = v(r,z) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi v(0, z+ir \cos \alpha) d\alpha = \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^\pi d\alpha \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\operatorname{Im} u(0, it) dt}{it - z - ir \cos \alpha} \right]. \end{aligned}$$

Met (5.28) vinden we dan

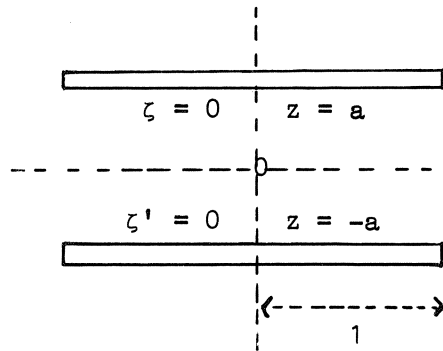
$$iu(r,z) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{Im} u(0, it) dt}{(r^2 + (z+it)^2)^{1/2}} - \frac{1}{\pi} \int_0^1 \frac{\operatorname{Im} u(0, it) dt}{(r^2 + (z-it)^2)^{1/2}},$$

zodat we $\psi(0, t) = \operatorname{Im} u(0, it)$ en $f(t)$ kunnen identificeren, wat we ook mochten verwachten bij vergelijking van (6.6) en (6.13).

Er is weer een complexe en een reële representatie gevonden voor de oplossing $u(r, z)$ van het Neumannprobleem voor een cirkelvormige schijf. Ook hier kunnen we opmerken dat het complementaire probleem, het Neumannprobleem voor een scherm met een cirkelvormig gat erin, oplossingen van een soortgelijke vorm toelaat.

7. De cirkelvormige plaatcondensator

Het is de bedoeling van deze en van de volgende paragraaf te laten zien hoe men met behulp van beschouwingen die verwant zijn aan die van methode II uit de vorige twee paragrafen, ingewikkeldere axiaalsymmetrische gemengde randwaardeproblemen op eenvoudige wijze kan aanpakken. Beide problemen die hier aan de orde gesteld zullen worden, zijn ook door Sneddon behandeld in zijn boek [13], in hoofdstuk VIII, op een andere, vaak minder eenvoudige wijze. Bovendien wordt het probleem van de cirkelvormige plaatcondensator, dat nu behandeld zal worden, hier iets algemener gesteld. We willen het veld tengevolge van twee coaxiale



$$(7.1) \quad u(r, a) = g(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$(7.2) \quad u(r, -a) = g(r), \quad 0 \leq r < 1.$$

parallele cirkelvormige platen bepalen die tot een gegeven slechts van de afstand tot de as afhangende potentiaal zijn opgeladen. Nauwkeuriger geformuleerd: gezocht wordt de axiaalsymmetrische potentiaal $u(r, z)$ die voldoet aan

Voer een nieuwe coördinaat ζ in, zodat $\zeta = 0$ op de bovenste plaat van de condensator. De potentiaal t.g.v. deze plaat is voor $\zeta > 0$ voor te stellen door

$$(7.3) \quad \tilde{u}_1(r, \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\tilde{\phi}_1(\zeta, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}},$$

zie bijv. (5.20). Wegens symmetrie moet voor $\zeta < 0$ gelden

$$\tilde{u}_1(r, \zeta) = \tilde{u}_1(r, -\zeta),$$

zodat

$$(7.4) \quad \tilde{u}_1(r, \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\tilde{\phi}_1(-\zeta, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad \zeta < 0.$$

Stel $\zeta' = 0$ op de onderste plaat. De potentiaal $\ddot{u}_2(r, \zeta')$ t.g.v. deze condensatorplaat is voor te stellen door

$$(7.5) \quad \ddot{u}_2(r, \zeta') = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\tilde{\phi}_2(\zeta', t)}{(r^2 - t^2)^{1/2}} dt, \quad \zeta > 0$$

en

$$\ddot{u}_2(r, \zeta') = \ddot{u}_2(r, -\zeta') \text{ als } \zeta < 0.$$

Omdat de potentiaal op beide condensatorplaten gelijkelijk is voorgeschreven, moeten $\phi_1(\zeta, t)$ en $\phi_2(\zeta', t)$ voor $\zeta = \zeta'$ dezelfde functie voorstellen, die we $\phi(\zeta, t)$ zullen noemen. Gaan we terug naar de oorspronkelijke coördinaten, dan vinden we uit (7.3) en (7.4)

$$\ddot{u}_1(r, z-a) = u_1(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z-a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z > a$$

en

$$\ddot{u}_1(r, z+a) = \ddot{u}_1(r, a-z) = u_1(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(a-z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z < a,$$

en analoog

$$\ddot{u}_2(r, z+a) = u_2(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z+a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z > a$$

en

$$u_2(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(-z-a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z < -a.$$

De totale potentiaal wordt nu gegeven door

$$u(r, z) = u_1(r, z) + u_2(r, z),$$

die in de drie verschillende gebieden respectievelijk de vorm

$$(7.6) \left\{ \begin{array}{l} u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z-a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z+a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z > a, \\ u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(a-z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(z+a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad -a < z < a, \\ u(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(a-z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(-z-a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z < -a \end{array} \right.$$

aanneemt. Laten we z tot a naderen in de eerste vergelijking, dan vinden we, met (7.1)

$$(7.7) \quad g(r) = u(r, 0) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(0, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} + \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi(2a, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

De middelste vergelijking levert hetzelfde resultaat, en nemen we $z \rightarrow -a$ in de laatste vergelijking van (7.6), dan vinden we ook (7.7) terug.

Maken wij gebruik van (5.22), waarin $\phi(\xi, \eta)$ in $\phi(0, \eta)$ wordt uitgedrukt, dan kunnen we (7.7) ook als volgt schrijven

$$g(r) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \left[\phi(0, t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2a\phi(0, \tau) d\tau}{4a^2 + (t-\tau)^2} \right] \frac{dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq r < 1.$$

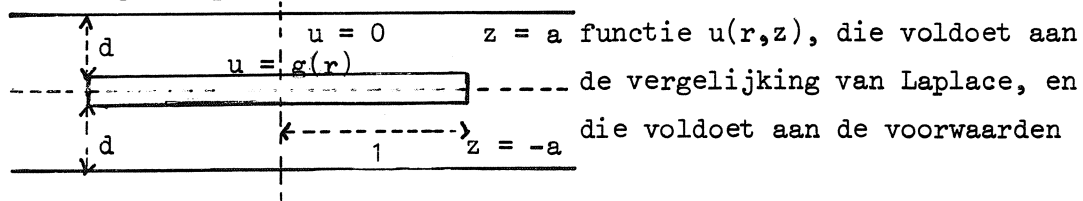
We kunnen deze betrekking beschouwen als een abelse vergelijking in de tussen teksthaken staande uitdrukking. Inverteren volgens (4.5) geeft dan als resultaat

$$(7.8) \quad \phi(0, t) + \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{2a\phi(0, \tau) d\tau}{4a^2 + (t-\tau)^2} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\tau g(\tau) d\tau}{(t^2 - \tau^2)^{1/2}}, \quad 0 \leq t < 1.$$

Love [11] leidde deze integraalvergelijking af voor het geval $g(t) \equiv \text{const.}$, bijvoorbeeld 1. Dan wordt het rechterlid van (7.8) ook 1. Het rechterlid van (7.8) is bekend, zodat we te maken hebben met een integraalvergelijking van Fredholm van de tweede soort. Dat (7.8), met $g \equiv 1$, volgens de methode van de geïtereerde kernen oplosbaar is, liet Love in hetzelfde werk [11] zien.

8. De geladen schijf tussen twee parellelle geaarde platen

We willen op een manier analoog aan die in de vorige paragraaf, het volgende probleem behandelen. Gezocht wordt een axiaalsymmetrische



$$(8.1) \quad u(r, a) = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$(8.2) \quad u(r, -a) = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

$$(8.3) \quad u(r, 0) = g(r), \quad 0 \leq r < 1.$$

Men kan dit zien als het probleem de potentiaal t.g.v. een tot een gegeven potentiaal opgeladen schijf te bepalen die zich bevindt tussen twee parellelle geaarde platen.

Noemen we de potentiaal t.g.v. de schijf, de bovenste geaarde plaat en de onderste geaarde plaat respectievelijk $u_0(r, z)$, $u_1(r, z)$ en $u_2(r, z)$, dan vinden we, net zoals in de vorige paragraaf

$$(8.4) \quad u_0(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi_0(z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z > 0,$$

$$(8.5) \quad u_0(r, z) = u_0(r, -z), \quad z < 0,$$

$$(8.6) \quad u_1(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi_1(a-z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z < a,$$

$$(8.7) \quad u_2(r, z) = \frac{2}{\pi} \int_0^r \frac{\phi_2(a+z, t) dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}}, \quad z > -a.$$

Het is weer, wegens symmetrieredenen, duidelijk, dat we de functies ϕ_1 en ϕ_2 kunnen vervangen door een functie ϕ . Laten we in de uitdrukking voor de totale potentiaal

$$u(r, z) = u_0(r, z) + u_1(r, z) + u_2(r, z)$$

z tot 0 naderen, dan vinden we

$$(8.8) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^r [\phi_0(0,t) + 2\phi(a,t)] \frac{dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} = g(r), \quad 0 \leq r < 1.$$

Ook hebben we voor $z \uparrow a$

$$(8.9) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^r [\phi_0(a,t) + \phi(0,t) + \phi(2a,t)] \frac{dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} = 0, \quad 0 \leq r < \infty,$$

en $z \downarrow -a$ levert eveneens (8.9) op. Wegens (5.22) gaat (8.8) over in

$$(8.10) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^r \left[\phi_0(0,t) + \frac{2}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(0,\tau)a \, d\tau}{a^2 + (t-\tau)^2} \right] \frac{dt}{(r^2 - t^2)^{1/2}} = g(r),$$

$0 \leq r < 1,$

en (8.9) over in

$$(8.11) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^r \left[\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_0(0,\tau)a \, d\tau}{a^2 + (t-\tau)^2} + \phi(0,t) + \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(0,\tau)2a \, d\tau}{4a^2 + (t-\tau)^2} \right] \times$$

$$\frac{1}{(r^2 - t^2)^{1/2}} dt = 0, \quad 0 \leq r < \infty.$$

Zowel (8.10) als (8.11) zijn op te vatten als abelse integraalvergelijkingen in de tussen teksthaken staande uitdrukkingen. Inverteren levert volgens (4.5) resp.

$$(8.12) \quad \phi_0(0,t) + \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(0,\tau)d\tau}{a^2 + (t-\tau)^2} = \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{\rho \, g(\rho)d\rho}{(t^2 - \rho^2)^{1/2}}$$

en

$$(8.13) \quad \phi(0,t) + \frac{a}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_0(0,\tau)d\tau}{a^2 + (t-\tau)^2} + \frac{2a}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(0,\tau)d\tau}{4a^2 + (t-\tau)^2} = 0.$$

(8.12) en (8.13) stemmen overeen met wat Sneddon vindt in [13] op blz. 250. Het is nu mogelijk ϕ in ϕ_0 uit te drukken m.b.v. (8.13), en daarna uit de vergelijking (8.12) ϕ_0 te vinden, zie [13].

9. Een niet-axiaalsymmetrisch Dirichletprobleem

Methode II in §5 berust op een vermenging van Poisson- en Helmholtz-representaties. Het blijkt dat ook niet-axiaalsymmetrische problemen, en in deze paragraaf zal het Dirichletprobleem voor de cirkelvormige schijf als voorbeeld dienen, op een dergelijke wijze te behandelen zijn. Het komt erop neer, dat de hoekafhankelijkheid van de gezochte harmonische functie in een Fourierreeks ontwikkeld wordt. Voor elke term ontstaat dan een Dirichletprobleem voor een gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentiaal, dat op een wijze analoog aan die in §5 wordt opgelost. Een en ander zal in de loop van de beschouwingen duidelijk worden.

Het probleem dat als voorbeeld dient is een functie $u(r, \theta, z)$ te vinden, die voldoet aan de potentiaalvergelijking

$$(9.1) \quad u_{rr} + r^{-1}u_r + u_{zz} + r^{-2}u_{\theta\theta} = 0, \quad z > 0,$$

en aan de gemengde randvoorwaarden

$$(9.2) \quad u(r, \theta, 0) = g(r, \theta), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$(9.3) \quad u_z(r, \theta, 0) = 0, \quad r > 1,$$

waarin $g(r, \theta)$ een functie is, gedefinieerd op de schijf $0 \leq r < 1$, die te ontwikkelen is in een Fourierreeks

$$(9.4) \quad g(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} g_n(r) e^{in\theta}.$$

Verondersteld wordt dat de functies $g_n(r)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) n maal continu differentieerbaar zijn op $[0, 1)$. Verder nemen we aan dat $u(r, \theta, z)$ en $u_z(r, \theta, z)$ continu zijn in r en z bij nadering tot de rand $z = 0$; behalve eventueel voor $r = 1$.

We zoeken oplossingen van de vorm

$$(9.5) \quad u(r, \theta, z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, z) e^{in\theta}.$$

Substitueren we (9.5) in vergelijking (9.1), dan vinden we dat de functies $u_n(r, z)$ voldoen aan

$$\frac{\partial^2 u_n}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 u_n}{\partial z^2} - \frac{n^2}{r^2} u_n = 0, \quad z > 0.$$

Stel $u_n(r, z) = r^n v_n(r, z)$. De functies $v_n(r, z)$ voldoen dan aan

$$\frac{\partial^2 v_n}{\partial r^2} + \frac{2n+1}{r} \frac{\partial v_n}{\partial r} + \frac{\partial^2 v_n}{\partial z^2} = 0, \quad z > 0,$$

wat juist de vergelijking voor de $(2n+1+2)$ -dimensionale gegeneraliseerde axiaalsymmetrische potentiaal is, zie §3.

Uit de randvoorwaarden (9.2) en (9.3) voor $u(r, \theta, z)$ en $u_z(r, \theta, z)$ leidt men gemakkelijk de volgende twee voorwaarden voor $u_n(r, z)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) af:

$$(9.6) \quad u_n(r, 0) = r^n v_n(r, 0) = g_n(r), \quad 0 \leq r < 1,$$

$$(9.7) \quad \frac{\partial u_n}{\partial z}(r, 0) = r^n \frac{\partial v_n}{\partial z}(r, 0) = 0, \quad r > 1.$$

Net als in §5 introduceren we nu achtereenvolgens een Helmholtz-achtige representatie, en een Poissonrepresentatie. Uit (3.7) volgt met $p = 2n + 3$, daar v_n een $(2n+3)$ -dimensionale harmonische functie is

$$v_n(x_1, \dots, x_{2n+3}) = \frac{2}{\sigma_{2n+2}} \int_{-\infty}^{\infty} \dots$$

$$\dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\frac{\partial v}{\partial x_{2n+3}}(\xi_1, \dots, \xi_{2n+2}, 0) d\xi_1 \dots d\xi_{2n+2}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_{2n+2} - \xi_{2n+2})^2 + x_{2n+3}^2]^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Daar v_n axiaalsymmetrisch is, hangt v_n alleen af van $r = (x_1^2 + \dots + x_{2n+2}^2)^{\frac{1}{2}}$ en $z = x_{2n+3}$. Stel $\rho = (\xi_1^2 + \dots + \xi_{2n+2}^2)^{\frac{1}{2}}$, dan is

$$v_n(r, z) = \frac{2}{\sigma_{2n+2}^1} \int_{0 \leq \rho < 1} \dots \int \frac{\frac{\partial v_n}{\partial z}(\rho, 0) d\xi_1 \dots d\xi_{2n+2}}{[(x_1 - \xi_1)^2 + \dots + (x_{2n+2} - \xi_{2n+2})^2 + z^2]^{n+\frac{1}{2}}},$$

i.v.m. (9.7). Er volgt

$$(9.8) \quad v_n(0, z) = \frac{2}{\sigma_{2n+2}^1} \int_{0 \leq \rho < 1} \dots \int \frac{\frac{\partial v_n}{\partial z}(\rho, 0) d\xi_1 \dots d\xi_{2n+2}}{(\rho^2 + z^2)^{n+\frac{1}{2}}},$$

wat te beschouwen is als een generalisatie van (5.16).

Net als daar is het hier mogelijk $v_n(0, z)$ analytisch voort te zetten voor complexe $z = \xi + i\eta$, omdat dat voor het rechterlid van (9.8) mogelijk is. We geven de voortzetting aan met

$$v_n(0, z) = v_n(0, \xi + i\eta) = \phi_n(\xi, \eta) + i\psi_n(\xi, \eta).$$

Uit (9.8) volgt onmiddellijk

$$(9.9) \quad \operatorname{Re} v_n(0, it) = \phi(0, t) = 0 \quad \text{voor} \quad |t| > 1.$$

Ook geldt

$$(9.10) \quad v_n(0, \bar{z}) = \overline{v_n(0, z)},$$

en

$$(9.11) \quad v_n(0, z) \rightarrow 0 \quad \text{als} \quad |z| \rightarrow \infty.$$

Nu wordt de Poissonrepresentatie (3.5) geïntroduceerd:

$$v_n(r, z) = \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^\pi v_n(0, z + ir \cos \alpha) \sin^{2n} \alpha d\alpha,$$

waaruit, i.v.m. (9.10) volgt

$$(9.12) \quad v_n(r, z) = \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^r \phi_n(z, t) (r^2 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} r^{-2n} dt.$$

De randvoorwaarde (9.6) betekent, dat voldaan moet worden aan de eis

$$r^{2n} g_n(r) r^{-n} = \frac{2\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^r \phi_n(0,t) (r^2 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt,$$

een integraalvergelijking van het gegeneraliseerde abelse type (4.1).
Inverteren levert volgens (4.3)

$$\phi_n(0,r) = \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{d}{dr} \int_0^r \left[\left(\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \right)^n (t^n g_n(t)) \right] (r^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} t dt.$$

Hierna gaat alles analoog aan de beschouwingen van §5. Laten wij de oplossing bij elkaar opschrijven.

$$(9.13) \quad \phi_n(0,\eta) = \frac{1}{n!} \frac{d}{d\eta} \int_0^\eta \left[\left(\frac{1}{2t} \frac{d}{dt} \right)^n (t^n g_n(t)) \right] (r^2 - t^2)^{-\frac{1}{2}} t dt, \quad 0 \leq \eta < 1,$$

$$\phi_n(0,\eta) = \phi_n(0,-\eta) \quad \text{voor} \quad -1 < \eta \leq 0$$

$$(9.14) \quad \phi_n(\xi,\eta) = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{\phi_n(0,\tau) \xi d\tau}{\xi^2 + (\eta - \tau)^2},$$

$$(9.15) \quad u_n(r,z) = 2r^{-n} \frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(n+\frac{1}{2})} \int_0^r \phi_n(z,t) (r^2 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} dt, \quad z > 0,$$

en tenslotte

$$(9.5) \quad u(r,\theta,z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r,z) e^{in\theta}.$$

De sterke verwantschap met methode II uit §5 is zonder meer duidelijk.
Vanuit een theoretisch standpunt zijn hierdoor bovenstaande beschouwingen aantrekkelijk.

Bibliografie

- [1] H. Bateman, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, Dover 1944.
- [2] E.T. Copson, On the Problem of the Electrified Disc, Proc. Edinb. Soc. 8 (1947) 14.
- [3] P.R. Garabedian, Partial Differential Equations, Wiley 1964.
- [4] A.E. Green & W. Zerna, Theoretical Elasticity, Clarendon Press 1954.
- [5] V.S. Gubenko & V.J. Mossakovskii, Pressure of an Axially Symmetric Circular Die on an Elastic Half-Space, PMM 24 (1969) 477 (English translation).
- [6] F. Hartogs, Über analytische Funktionen mehrerer unabhängigen Veränderlichen, Math. Analen 62 (1905) 12.
- [7] A.E. Heins, Function-Theoretic Aspects of Diffraction Theory, 99 e.v. in R.E. Langer, Electromagnetic Waves, Madison 1962.
- [8] A.E. Heins, Axially-Symmetric Boundary-Value Problems, Bull. Am. Math. Soc. 71 (1965) 787.
- [9] A.E. Heins & R.C. MacCamy, On Mixed Boundary-Value Problems for Axially-Symmetric Potentials, J. Math. Anal. and Appl. 1 (1960) 331.
- [10] M.A. Hyman, Coverning Analytic Solutions of the Generalized Potential Equation, Ind. Math. 16 (1954) 408.
- [11] E.R. Love, Quart. J. Mech. and Appl. Math. 2 (1949) 428.
- [12] N.I. Muschelischwili, Singuläre Integralgleichungen, Akademie Verlag 1965.
- [13] I.A. Sneddon, Mixed Boundary Value Problems in Potential Theory, Noordhoff 1966.
- [14] C.J. Tranter, Integral Transforms in Mathematical Physics, Methuen, Wiley 1951.
- [15] H. Weber, J. Math. 75 (1873) 75.